

II. kolo kategorie Z9

Z9–II–1

Maruška napsala na tabuli dvě různá přirozená čísla. Marta si vzala kartičku, na jejíž jednu stranu napsala součet Maruščiných čísel a na druhou stranu jejich součin. Jedno z čísel na kartičce bylo prvočíslo a součet čísel z obou stran kartičky byl 97.

Která čísla napsala Maruška na tabuli?

(*L. Hozová*)

Možné řešení. Čísla na tabuli označíme x a y . Na jedné straně kartičky tak bylo napsáno číslo $x + y$, na druhé straně číslo $x \cdot y$ a celkem platilo

$$x + y + xy = 97. \quad (1)$$

Levá strana souhlasí se třemi sčítanci v roznásobení výrazu $(x + 1)(y + 1)$, chybí pouze 1. Přičtením 1 k oběma stranám rovnice (1) dostáváme

$$(x + 1)(y + 1) = 98. \quad (2)$$

Protože x a y jsou přirozená čísla, součinitelé na levé straně této rovnice musí být alespoň 2. Číslo 98 lze vyjádřit jako součin dvou přirozených čísel větších než 1 pouze těmito způsoby (pořadí součinitelů ignorujeme):

$$2 \cdot 49 = 98, \quad 7 \cdot 14 = 98. \quad (3)$$

První možnosti odpovídají čísla $x = 1$ a $y = 48$, pro něž je $x + y = 49$ a $xy = 48$. Ani jedno z těchto dvou čísel není prvočíslem, pročez tahle možnost nevyhovuje zadání úlohy.

Druhé možnosti odpovídají čísla $x = 6$ a $y = 13$, pro něž je $x + y = 19$ a $xy = 78$. Číslo 19 je a číslo 78 není prvočíslem, což vyhovuje zadání úlohy. Maruška napsala na tabuli čísla 6 a 13.

Hodnocení. Po 1 bodu za vyjádření (1) a úpravu (2); 2 body za rozklady (3); 2 body za rozbor možností a závěr.

Jiné řešení. Při stejném značení jako výše můžeme z rovnice (1) vyjádřit y pomocí x :

$$y = \frac{97 - x}{1 + x}. \quad (4)$$

Postupným dosazováním přirozených čísel za x můžeme vyjádřit y a ověřit, zda se jedná o přirozené číslo a zda jedno z čísel $x + y$ a xy je prvočíslem:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	...
y	48	$\frac{95}{3}$	$\frac{47}{2}$	$\frac{93}{5}$	$\frac{46}{3}$	13	$\frac{45}{4}$	$\frac{89}{9}$	...
$x + y$	49					19			
xy	48					78			

Mezi uvedenými možnostmi je jediná vyhovující dvojice čísel 6 a 13. Nyní by se měla prověřit ještě ostatní dosazení za x až do 96 (aby y bylo kladné). To však není nutné, protože s rostoucím x hodnota y stále klesá a je jistě menší než 9 (kdyby x i y byly současně větší nebo rovny 9, potom by hodnota $x+y+xy$ byla větší nebo rovna $9+9+81 = 99$). Vzhledem k symetričnosti úlohy se proto všechna řešení musí vyskytovat v uvedené tabulce.

Maruška napsala na tabuli čísla 6 a 13.

Hodnocení. Po 1 bodu za vyjádření (1) a (4); 2 body za dosazování a ověřování jako v tabulce; 2 body za úplnost diskuse a závěr.

Poznámka. Lomený výraz (4) můžeme vyjádřit ve tvaru „celá část plus zbytek“ takto:

$$y = \frac{97 - x}{1 + x} = \frac{-(1 + x) + 98}{1 + x} = -1 + \frac{98}{1 + x}.$$

Protože x a y mají být přirozená čísla, musí být $1 + x$ kladným vlastním dělitelem čísla 98, a takové dělitele máme právě čtyři: 2, 7, 14 a 49. Odtud dostaneme dvě možnosti (až na pořadí x a y), z nichž jedna vyhovuje všem požadavkům. Tento postup lze chápat jako jinou interpretaci rovnice (2) a následných úvah.

Z9–II–2

Máme kvádr, jehož jedna hrana je pětkrát delší než jiná jeho hrana. Kdybychom výšku kváдру zvětšili o 2 cm, zvětšil by se jeho objem o 90 cm^3 . Kdybychom dále výšku takto zvětšeného kváдру změnili na polovinu, byl by objem nového kváдру roven třem pětinám objemu původního kváдру.

Jaké mohou být rozměry původního kváдру? Určete všechny možnosti.

(E. Semerádová)

Možné řešení. Objem kváдру je roven součinu obsahu podstavy a velikosti výšky. Změna výšky o 2 cm, způsobuje změnu objemu o 90 cm^3 ; odpovídající podstava má proto obsah $90 : 2 = 45 (\text{cm}^2)$.

Při další změně výšky se podstava nemění, proto změna objemu kváдру na tři pětiny odpovídá změně výšky rovněž na tři pětiny. Označíme-li výšku původního kváдру v centimetrech v , platí

$$\frac{v + 2}{2} = \frac{3}{5}v.$$

Odtud se snadno vyjádří $v = 10 \text{ cm}$.

Poslední nevyužitou informací ze zadání je, že jedna hrana kváдру je pětkrát delší než jiná jeho hrana. Mohou nastat tři možnosti:

- Jedna hrana podstavy je pětkrát delší než výška, tj. 50 cm. Odtud druhá hrana podstavy měří $45 : 50 = 0,9 (\text{cm})$.
- Jedna hrana podstavy je pětkrát kratší než výška, tj. 2 cm. Odtud druhá hrana podstavy měří $45 : 2 = 22,5 (\text{cm})$.
- Jedna hrana podstavy je pětkrát delší než druhá její hrana. Označíme-li velikost kratší z těchto hran v centimetrech a , platí $a(5a) = 45$, tedy $a^2 = 9$ a $a = 3 (\text{cm})$. Odtud delší hrana podstavy měří $5 \cdot 3 = 15 (\text{cm})$.

Rozměry původního kvádrů v centimetrech mohou být $0,9 \times 50 \times 10$, nebo $2 \times 22,5 \times 10$, nebo $3 \times 15 \times 10$.

Hodnocení. 1 bod za obsah podstavy; 2 body za výšku původního kvádrů; po 1 bodu za každé správné řešení.

Z9–II–3

Z číslic 3, 4, 5, 7 a 9 byla vytvořena všechna možná trojmístná čísla tak, aby se každá číslice vyskytovala v každém čísle nejvýše jednou.

Určete počet takto vzniklých čísel a jejich celkový součet. (M. Volfová)

Možné řešení. Při tvoření trojmístných čísel s uvedenými vlastnostmi je možno postupovat následovně:

První místo lze obsadit libovolnou z pěti uvedených číslic, tj. 5 možností. Pro každé z těchto obsazení lze druhé místo obsadit libovolnou ze čtyř zbylých číslic, tj. celkem $5 \cdot 4 = 20$ možností. Pro každé z těchto obsazení lze třetí místo obsadit libovolnou ze tří zbylých číslic, tj. celkem $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ možností. Takto vzniklých trojmístných čísel je tedy 60.

K určení celkového součtu všech těchto čísel si stačí uvědomit, že na každém místě se každá z pěti číslic vyskytuje dvanáctkrát ($5 \cdot 12 = 60$). Součet číslic na vybraném místě ve všech uvažovaných číslech je roven

$$12 \cdot (3 + 4 + 5 + 7 + 9) = 12 \cdot 28 = 336.$$

Podle příslušného místa se tato hodnota v celkovém součtu vyskytuje jedenkrát, desetkrát a stokrát. Součet všech uvažovaných čísel je proto roven

$$336 \cdot (1 + 10 + 100) = 336 \cdot 111 = 37\,296.$$

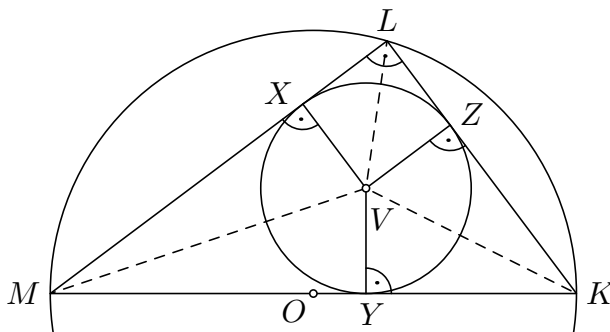
Hodnocení. 2 body za počet čísel; 2 body za celkový součet; 2 body za kvalitu, resp. úplnost komentáře.

Z9–II–4

V pravoúhlém trojúhelníku je poloměr jemu opsané kružnice 14,5 cm a poloměr jemu vepsané kružnice 6 cm.

Určete obvod tohoto trojúhelníku. (L. Hozová)

Možné řešení. Střed kružnice opsané pravoúhlému trojúhelníku je ve středu jeho přepony; tento bod je na obrázku označen O . Střed kružnice vepsané je společným průsečíkem os vnitřních úhlů trojúhelníku; tento bod je označen V a body dotyku kružnice s jednotlivými stranami trojúhelníku jsou označeny X , Y a Z :



Poloměr kružnice opsané je 14,5 cm, přepona KM je průměrem této kružnice, tedy velikost KM je 29 cm.

Poloměr kružnice vepsané je 6 cm, a to je také velikost úseček VX , VY a VZ . Shodné úsečky VX a VZ jsou sousedními stranami v pravoúhelníku $VXLZ$, tento pravoúhelník je proto čtvercem a velikosti úseček LX a LZ jsou také 6 cm.

Trojúhelníky KYV a KZV jsou oba pravoúhlé, mají shodné úhly u vrcholu K a společnou stranu KV . Proto jsou tyto trojúhelníky shodné, tedy úsečky KY a KZ jsou shodné; jejich velikost na chvíli označíme a . Z obdobného důvodu jsou shodné také úsečky MX a MY ; jejich velikost označíme b .

Celkem tak dostáváme $a + b = |KM| = 29$ cm a obvod trojúhelníku KLM umíme vyjádřit jako

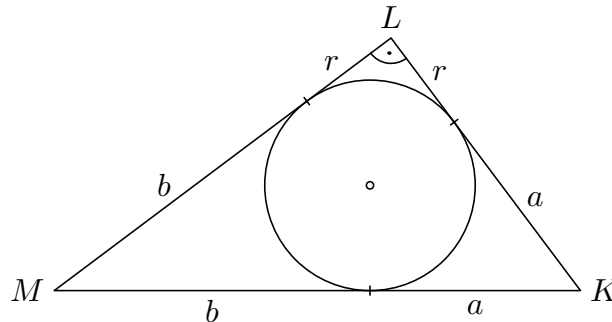
$$2a + 2b + 2 \cdot 6 = 2(a + b) + 12 = 70 \text{ (cm)}.$$

Hodnocení. 1 bod za velikost přepony; 3 body za vyjádření obvodu; 2 body za kvalitu komentáře.

Poznámka. Pokud označíme poloměr kružnice opsané R a velikost přepony $|KM| = l$, potom první pozorování v uvedeném řešení můžeme obecně zapsat $l = 2R$, tedy

$$R = \frac{l}{2}. \quad (1)$$

Pokud dále označíme poloměr kružnice vepsané r a velikosti odvěsen $|LM| = k$ a $|KL| = m$, potom další závěry z předchozího řešení jsou $m = r + a$, $k = r + b$ a $l = a + b$:



Odtud vyplývá, že $k + m - l = 2r$, tedy

$$r = \frac{k + m - l}{2}, \quad (2)$$

a obvod trojúhelníku lze obecně vyjádřit jako

$$k + m + l = 2r + 4R. \quad (3)$$

Vzorce (1) a (2) lze považovat za známé a vyskytují se v některých tabulkách. Na nich založené řešení (3) by tedy mělo být posuzováno jako správné.